COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\text{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à l'intervalle $[-\pi, \pi[$, et on pose :

$\text{Log}(z) = \text{Log}\,|z| + i\,\text{Arg}(z)$, puis pour tout nombre complexe a : $z^a = e^{a\,\text{Log}(z)}$.

Si z est un nombre complexe, on note $\text{Re}(z)$ sa partie réelle, $\text{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

Les propriétés suivantes de la fonction Γ pourront être utilisées sans démonstration.

Pour $\text{Re}(z) > 0$, on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\,.$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Re}(z) > 0$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Si z n'est pas un pôle, on a : $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ et $\Gamma(z) \neq 0$.

Soit δ un nombre réel, $0 < \delta \leqslant \pi$. Le nombre complexe a étant fixé, on a, pour z complexe, vérifiant $|\text{Arg}\, z| \leqslant \pi - \delta$:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1\,.$$

PREMIÈRE PARTIE

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

On lui associe la série de fonctions

$$F(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n\, n\,!}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)}$$

où z est un nombre complexe dont on suppose toujours la partie réelle positive. Les séries de ce type sont appelées séries de facultés. On note que

$$\frac{n\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+n)} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)}\,.$$

1° *a*. Soit z un nombre complexe, $\text{Re}(z) > 0$.

Trouver la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{n\,!}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)} \cdot \dfrac{n^z}{\Gamma(z)}$,

et en déduire que la série de facultés est absolument convergente au point z si et seulement si la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^z}$$

est absolument convergente au point z.

On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que la série de facultés soit absolument convergente pour $z = k$.

b. Démontrer que la série de facultés converge uniformément dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geqslant k$. Que peut-on en conclure pour sa somme F ?

c. Démontrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres complexes et une suite $(c_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels positifs telles que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait

$$\sup_{\mathrm{Re}(z) \geqslant k} \left| z^n \left(\mathrm{F}(z) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha_{p-1}}{z^p} \right) \right| \leqslant c_n .$$

(On ne demande pas de calculer les α_n.)

2° *a.* Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Calculer le maximum pour $r \in [0, 1]$ de la fonction

$$r \longmapsto r^n (1 - r)^k$$

b. Démontrer que la série entière

$$\psi(w) = \sum_{n \geqslant 0} a_n w^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à un et qu'il existe un nombre réel $d > 0$, ne dépendant que de k, tel que

$$|\,\psi(w)\,(1 - |\,w\,|)^k\,| \leqslant d \left(|\,a_0\,| + \sum_{n \geqslant 1} |\,a_n\,|\, n^{-k} \right)$$

pour $|\,w\,| < 1$.

c. Établir la formule

$$\frac{n\,!}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)} = \int_0^1 s^{z-1} (1 - s)^n \, ds ,$$

pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.

d. On pose

$$\varphi(s) = \psi(1 - s) \qquad \text{pour} \qquad |\,1 - s\,| < 1.$$

Démontrer que, pour $\mathrm{Re}(z) > k$, on a

$$\mathrm{F}(z) = \int_0^1 s^{z-1} \varphi(s) \, ds .$$

3° Soit θ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\theta(t) = e^{-t}$.

a. Démontrer que θ est une bijection biholomorphe de la bande ouverte $\left\{ t \in \mathbb{C} \mid Im(t) \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\right\}$ sur le demi-plan ouvert $\{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 0 \}$.

On note Δ l'image réciproque par cette bijection du disque ouvert $|1 - s| < 1$ et C l'image réciproque du cercle $|1 - s| = 1$. Calculer la partie réelle d'un élément de C en fonction de sa partie imaginaire. Représenter graphiquement C et Δ.

b. La fonction φ étant définie comme au 2° *d.*, soit, pour $t \in \Delta$, $f(t) = \varphi(e^{-t})$.

Démontrer que f est holomorphe dans Δ et que la fonction $t \longmapsto |f(t)\, e^{-kt}|$ est bornée pour $t \in [0, +\infty[$.

c. Démontrer que, pour $Re(z) > k$, on a

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\, dt.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'ouvert Δ de $\mathbb{C}$ est défini comme dans la première partie. On note D le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et on note ν la mesure de Lebergue de $\mathbb{R}^2$. Enfin soit k un nombre réel, $k > 1$.

1° Soit f une fonction définie et holomorphe dans Δ. Soit φ la fonction holomorphe dans D définie par

$$\varphi(e^{-t}) = f(t), \qquad \text{pour} \qquad t \in \Delta$$

On pose $\psi(w) = \varphi(1 - w)$, pour $|w| < 1$, et on note

$$\psi(w) = \sum_{n \geq 0} a_n w^n$$

le développement en série entière de ψ en 0. On suppose que la fonction

$$t \longmapsto |f(t)\, e^{-kt}|$$

est bornée sur Δ.

a. Démontrer que si $r > k - 1$, l'intégrale

$$\iint_\Delta e^{-2(r+1)\,\mathrm{Re}\, t} |f(t)|^2\, d\nu(t)$$

converge, et en déduire que l'intégrale

$$\iint_{|w|<1} (1 - |w|)^{2r} |\psi(w)|^2\, d\nu(w)$$

converge.

b. Sous les hypothèses précédentes, montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} | a_n |^2 \int_0^1 \rho^{2n+1} (1 - \rho)^{2r} \, d\rho$$

converge.

Trouver un équivalent simple du terme général de cette série et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} | a_n |^2 n^{-2r-1}$ converge.

Soit $m > r + 1$. Par une application convenable de l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrer que la série $\sum_{n \geq 1} | a_n | n^{-m}$ converge.

c. Que peut-on conclure de ce qui précède pour la série de facultés associée à la suite $(a_n)_{n \geq 0}$?

Soit ω un nombre réel, $\omega \geqslant 1$. On note Δ_ω l'homothétique de Δ dans l'homothétie de centre l'origine et de rapport $1 / \omega$. Une série de facultés généralisées de type ω est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n \, n \, ! \, \omega^n}{z \, (z + \omega) \, \ldots \, (z + n \, \omega)}$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

2° Soit f une fonction définie et holomorphe dans Δ_ω et telle que $| f(t) \, e^{-kt} |$ soit borné dans Δ_ω. Pour $\mathrm{Re}\,(z) > k$, on pose à nouveau

$$\mathrm{F}\,(z) = \int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-zt} \, dt .$$

Démontrer que, pour k convenable, la fonction F est développable en série de facultés généralisées de type ω.

3° Soit a un entier, $a \geqslant 1$, et soit c un nombre complexe. Soit, pour $\mathrm{Re}\ t > -1$

$$f(t) = t^{a-1} (1 + t)^{c-a-1} .$$

Pour quelles valeurs de k et de ω peut-on appliquer les résultats précédents?

TROISIÈME PARTIE

Soit A un nombre réel strictement positif.

On lui associe l'ouvert

$$\mathrm{V_A} = \left\{ t \in \mathbb{C} \;\middle|\; | t | < \frac{1}{\mathrm{A}} \right\} \cup \left\{ t \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,(t) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(t) < \frac{1}{\mathrm{A}} \right\} .$$

Soit μ un nombre réel strictement positif.

1° Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur la demi-droite fermée $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

i. La fonction f se prolonge en une fonction, encore notée f, holomorphe dans V_A et quels que soient les nombres réels $\mu_1 > \mu$ et $A_1 > A$ la fonction $t \longmapsto |f(t)\, e^{-\mu_1 t}|$ est bornée dans V_{A_1}.

ii. Quels que soient les nombres réels $\mu_1 > \mu$ et $A_1 > A$, il existe un nombre réel positif $C(\mu_1, A_1)$ tel que, quels que soient le nombre réel $t \geqslant 0$ et l'entier $n \geqslant 0$, on ait

$$|f^{(n)}(t)\, e^{-\mu_1 t}| \leqslant C(\mu_1, A_1)\, n!\, A_1^n.$$

2° On suppose que la fonction f vérifie les conditions de la question précédente et, pour $\mathrm{Re}(z) > \mu$, on pose

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$F(z) = \sum_{p=1}^{n} f^{(p-1)}(0)\, z^{-p} + z^{-n} \int_0^{+\infty} e^{-tz} f^{(n)}(t)\, dt.$$

b. Soient $\mu_1 > \mu$ et $A_1 > A$ deux nombres réels. Démontrer qu'il existe un nombre réel $K(\mu_1, A_1)$ tel que, quel que soit le nombre entier $n \geqslant 1$, on ait

$$\sup_{\mathrm{Re}(z) \geqslant \mu_1} \left| z^n \left(F(z) - \sum_{p=1}^{n} f^{(p-1)}(0)\, z^{-p} \right) \right| \leqslant K(\mu_1, A_1)\, n!\, A_1^n.$$

3° Soit F une fonction définie et holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > \mu$. On suppose que, quel que soit le nombre réel $\mu_1 > \mu$, la fonction $z \longmapsto |z^2 F(z)|$ est bornée dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geqslant \mu_1$. Si t est un nombre réel, $t \geqslant 0$, on pose

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(z) = \mu_1} e^{tz} F(z)\, dz$$

où $\mu_1 > \mu$ et où la droite $\mathrm{Re}(z) = \mu_1$ est orientée dans le sens des ordonnées croissantes.

a. Montrer que l'intégrale qui définit f est convergente, que f est continue et indépendante de μ_1.

b. Soit

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\, dt.$$

Montrer que Φ est définie et holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) > \mu$, et que si $\mu < \mu_1 < \mathrm{Re}(z_0)$, alors

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(z) = \mu_1} F(z) \frac{dz}{z_0 - z}.$$

En déduire que $\Phi = F$.

c. On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, avec $\alpha_0 = 0$, et telle que, quels que soient les nombres réels $\mu_1 > \mu$ et $A_1 > A$, il existe un nombre réel $K(\mu_1, A_1)$, vérifiant, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$,

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geqslant \mu_1} \left| z^n \left(F(z) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha_{p-1}}{z^p} \right) \right| \leqslant K(\mu_1, A_1)\, n!\, A_1^n .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'elle vérifie la condition *ii*. de la première question. (On pourra d'abord exprimer sous forme intégrale l'expression

$$f(t) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_p}{p!} t^p .)$$

d. On conserve les hypothèses précédentes.

Démontrer qu'il existe un nombre réel $\omega_0 > 0$ tel que, pour $\omega > \omega_0$, la fonction F soit développable en série de facultés généralisées de type ω. Préciser un demi-plan de convergence absolue de ce développement. Que se passe-t-il si on supprime l'hypothèse $\alpha_0 = 0$?

4° On définit f comme dans la 3e question de la deuxième partie.

Appliquer à f et à la fonction correspondante F les résultats des questions précédentes. Comparer avec la deuxième partie. Calculer la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n T^n$ est-elle convergente?

5° On revient pour F à la situation du 3° *c*. ci-dessus.

Montrer que, $\omega > \omega_0$ étant fixé, la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de déterminer de façon unique les coefficients a_n du développement en série de facultés généralisées de type ω de F. (On ne cherchera pas une formule explicite.)

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE

Connues depuis longtemps au niveau des exemples, les séries de facultés ont été étudiées systématiquement au début du siècle en liaison avec la théorie analytique des équations aux différences finies où elles jouent un rôle voisin de celui des séries entières dans la théorie des équations différentielles linéaires. De manière plus surprenante elles permettent dans certains cas d'attribuer une valeur à des séries entières divergentes notamment celles qui interviennent dans l'étude d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier irrégulier. L'exemple esquissé en II 3°) et III 4°) correspond à l'équation hypergéométrique confluente. L'objet principal du problème était de montrer qu'une fonction définie et holomorphe dans un demi-plan de la forme $\mathrm{Re}(z) > \mu$ et admettant un développement asymptotique avec des estimations à la Gevrey (cf. III 3°)c)) est développable en série de facultés et de montrer comment de telles fonctions s'obtiennent par transformation de Laplace.

A l'exception de I 1)c), les deux premières parties étaient faciles, ainsi d'ailleurs que le début de III 3°). Un assez grand nombre de candidats ont su aborder valablement le problème et l'impression d'ensemble est assez bonne. Outre quelques erreurs importantes qu'on signalera plus loin, le principal défaut rencontré est l'imprécision des rédactions (ce n'est pas une question de longueur !) qui laisse souvent le correcteur perplexe. Enfin, comme chaque année, on constate l'incapacité de la très grande majorité des candidats à appliquer correctement les théorèmes de passage à la limite dans la théorie de Lebesgue (convergence dominée, intégration terme à terme d'une série et théorème de Fubini).

Voici maintenant quelques remarques particulières et quelques éléments de solution concernant les parties les plus fréquemment abordées par les candidats.

Première partie

1°) a) On a de suite

$$\left|\frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}\right| \sim \left|\frac{a_n}{n^z}\right| |\Gamma(z)| .$$

Dans trop de copies on trouve des phrases du type "si les termes généraux de deux séries sont équivalents alors les séries sont de même nature".

b) Il suffit de noter que, pour $Re(z) \geq k$, on a

$$\frac{|a_n|}{|z||z+1|\ldots|z+n|} \leq \frac{|a_n|}{k(k+1)\ldots(k+n)}$$

la fonction F est donc continue pour $Re(z) \geq k$ et holomorphe pour $Re(z) > k$. Une erreur fréquente a consisté à démontrer que la série de Dirichlet convergeait uniformément pour $Re(z) \geq k$ et à affirmer que, d'après la question précédente, ceci impliquait la convergence uniforme de la série de facultés. Hélas pour les candidats, l'équivalence établie en a) n'est pas "uniforme" en z ...

c) Cette question est un peu délicate et a été sautée par la quasi totalité des candidats. Voici comment on peut procéder. On a

$$F(z) = \sum_{o}^{n-1} \frac{a_p}{z(z+1)\ldots(z+p)} + R_n(z)$$

et

$$|R_n(z)| \leq \frac{1}{|z||z+1|\ldots|z+n|} \sum_{p \geq n} \frac{|a_p|}{|z+n+1|\ldots|z+p|}$$

$$\leq \frac{1}{|z|^{n+1}} \sum_{p \geq n} \frac{|a_p|}{|k+n+1|\ldots|k+p|} .$$

Par suite

$$|z|^{n+1} |R_n(z)|$$

est borné dans le demi-plan $Re(z) \geq k$.

D'autre part, pour tout p , la fonction

$$\frac{a_p}{z(z+1)\ldots(z+p)}$$

est holomorphe à l'infini et admet donc un développement de la forme

$$\frac{a_p}{z(z+1)\dots(z+p)} = \sum_{q \geq p+1} \frac{b_{p,q}}{z^q}$$

(elle a un zéro d'ordre $p+1$ à l'infini), développement convergeant pour $|z| > p$.

Prenons $p < n$. On a

$$\left|\frac{a_p}{(z(z+1)\dots(z+p)} - \sum_{q=p+1}^{n} \frac{b_{p,q}}{z^q}\right| \leq \sum_{q \geq n+1} \frac{|b_{p,q}|}{|z|^q} .$$

Le produit par z^n du membre de gauche de cette inégalité tend donc vers 0 quand $|z|$ augmente indéfiniment. On prend

$$\alpha_{q-1} = \sum_{p=0}^{q-1} b_{p,q}$$

et il résulte des inégalités précédentes que

$$z^n\left(F(z) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha_{p-1}}{z^p}\right)$$

tend vers 0 quand z tend vers l'infini dans le demi-plan $Re(z) \geq k$ et est donc borné dans ce demi-plan.

2°) a) sans commentaires.

b) Comme la série de Dirichlet converge pour $z = k$, la suite $(a_n n^{-k})$ est bornée ce qui implique aisément la convergence de la série entière dans le disque $|z| < 1$. Une erreur grossière (et fréquente) consiste à affirmer que la règle de d'Alembert donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.

La majoration était évidente à partir de a) et a, en général, été bien faite.

c) Correctement traité.

d) Bien peu de candidats ont été capables de justifier l'intégration terme à terme. Il suffisait de noter que, si $x = Re(z)$

$$\int_0^1 s^{x-1} \sum_0^{\infty} |a_n| (1-s)^n \, ds = \sum_0^{\infty} \frac{|a_n| n!}{(x(x+1) - (x+n))} < +\infty$$

pour $x \geq k$ et d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série (Lebesgue).

3°) Question très élémentaire mais demandant un peu de soin. La plupart des rédactions sont filandreuses et laissent planer des doutes sur un point ou un autre.

Deuxième partie.

1°) a) L'intégrale se majore de suite par

$$\iint_{\Delta} e^{-2(r+1-k)\mathrm{Re}(t)} d\nu(t)$$

et il suffisait de noter que $\Delta \subset [-\log 2, +\infty[\times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Un nombre surprenant de candidats affirme que Δ est d'aire finie alors qu'ils l'ont correctement dessiné à la question précédente !

b) On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |\psi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$$

(égalité L^2 de la théorie des séries de Fourier) et il suffit de passer en coordonnées polaires dans l'intégrale double de a). Très peu de candidats y sont arrivés. La fin de la question a) par contre a été bien traitée. En particulier les correcteurs ont eu l'heureuse surprise de voir appliquée de façon correcte l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
La fin de cette partie n'a pas soulevé de difficultés pour les candidats arrivés jusque là.

Troisième partie.

1°) Cette question a arrêté presque tous les candidats.

i) ⇒ ii) Pour $t \geq 0$ et $A_1 > A$

$$f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{|z-t| = 1/A_1} f(z)/(z-t)^{n+1}\, dz$$

et on majore l'intégrale.

ii) $\Rightarrow$ i) La série de Taylor de f en $t \geq 0$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/A$, ce qui fournit une fonction analytique dans ce disque. On montre que ces fonctions se recollent et qu'on a ainsi construit un prolongement de f.

2°) Sans difficultés.

3°) Le début de la question (a) et b)) est un exercice très classique de théorie des fonctions analytiques. Les candidats arrivés jusque là l'ont dans l'ensemble bien traité. Seuls quelques-uns des meilleurs candidats sont allés plus loin.

Bibliographie

NÖRLUND

1) Vorlesungen über Differenzenrechnung. Die Grundlehren der Math. Wiss. Bd 13, Springer.

2) Leçons sur les séries d'interpolation. Paris Gauthier-Villars 1926. Collection de Monographies sur la théorie des fonctions.

3) Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Paris Gauthier-Villars 1929. Collection de Monographies sur la théorie de fonctions.

Répartition des notes

Notes	Nombre de copies
0	52
1 - 4	192
5 - 8	105
9 - 12	100
13 - 16	109
17 - 20	76
21 - 24	62
25 - 28	47
29 - 32	48
33 - 36	26
37 - 40	21
41 - 44	14
45 - 48	10
49 - 52	5
53 - 56	2
57 - 60	1

Nombre de copies corrigées 870.